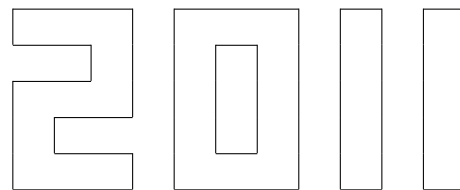


6–7 класс

1. Цифры числа 2011 вырезаны из клетчатого листа бумаги высотой 5 клеток так, как показано на рисунке. Сделайте два разреза так, чтобы из полученных шести кусочков можно было (без наложений) сложить прямоугольник.



2. Школьники на кружковой контрольной работе решали две задачи. По окончании трое школьников обсуждали полученные ими ответы. Саша сказал: “В первой задаче ответ меньше 30; во второй ответ 13”. Лёша сказал: “В первой задаче ответ больше 28; во второй не больше 13”. Федя сказал: “В первой задаче ответ 25; во второй ответ больше 13”. Известно, что один из мальчиков оба раза ошибся, а двое других оказались правы. Какие были ответы в задачах, если ответами в задачах были натуральные числа? Почему Вы так считаете?
3. Найдите все четырёхзначные числа, которые в сумме со своей суммой цифр дают 2016, и объясните, что других нет.
4. Надя и Костя играют в поддавки на 100-клеточной доске, у каждого из них первоначально по 20 шашек. После одного из ходов число Надиных шашек относилось к числу Костиных как 3 к 2. Еще через несколько ходов общее число шашек на доске уменьшилось на 4, и число Надиных шашек стало относиться к числу Костиных как 4 к 3. Сколько шашек осталось на доске в этот момент? Ответ объясните.
5. Прямоугольное здание неизвестного размера разделено перегородками на много одинаковых клеток-комнат так, что каждая комната представляет собой единичную клетку исходного прямоугольника. Каждые две соседние (по стороне) комнаты соединены дверьми. Барона Мюнхгаузена с завязанными глазами проводят в одну из комнат. Как ему найти общее количество комнат в здании (разрешается переходить из комнаты в комнату)?
6. К востоку от собаки сидят две блохи. Одна на расстоянии 25 метров, а другая — на расстоянии 40 метров. За одну секунду либо одна из блох проходит на запад или восток 1 метр, либо дальняя от собаки блоха перепрыгивает через ближнюю так, чтобы расстояние между блохами осталось прежним. Как нужно действовать блохам, чтобы одна из них добралась до собаки за 4 секунды?
7. По кругу расставлены 2011 единиц. У старика Хоттабыча есть инструмент, который можно приложить к двум числам, между которыми стоят ровно 3 других числа, и прибавить 1 на одном конце инструмента, вычтя 1 на другом его конце (если имеющееся там число положительно). Может ли он получить после нескольких таких операций число 2011 на одной из позиций? Ответ объясните.

8–9 класс

1. На международную конференцию, посвящённую объединению разделённого острова Утопия, были приглашены островитяне из двух племён: Га и Ти. Представители южного племени Га всегда говорят правду, а северного Ти всегда лгут. В итоге на конференцию приехало 2011 островитян. Их рассадили за круглый стол. Островитянин Лео сказал: “Я сижу между представителями разных племён, причём справа от меня сидит мой соплеменник”. Все остальные сказали: “Я сижу между представителями разных племён, причём слева от меня сидит мой соплеменник”. Из какого племени был Лео? Ответ объясните.
2. Дан четырехугольник; A, B, C, D — последовательные середины его сторон, P, Q — середины диагоналей. Докажите, что треугольник BSP равен треугольнику ADQ .
3. Можно ли так посадить 10 яблонь, чтобы образовалось 6 рядов по 4 дерева в каждом ряду, и направления всех рядов были бы различны? Почему Вы так считаете?
4. На плоскости отмечены 3 ряда по 2012 точек. Соседние по горизонтали или соседние по вертикали точки можно соединять звеном. Сколько существует замкнутых 6036-звенных ломаных без самопересечений, построенных таким образом?
5. В классе висят две доски. На одной написано целое число a , а на другой — целое число b . За один ход Глебу разрешается заменить число на одной доске либо на сумму чисел, записанных на досках, либо на их разность (в любом порядке). За какое наименьшее количество ходов Глебу удастся поменять числа a и b местами?
6. Назовём хорошей последовательность состоящую из чисел от 1 до n (каждое встречается ровно один раз), если никакие три подряд идущие в ней числа не идут ни по возрастанию, ни по убыванию. Размахом последовательности назовём минимальную по модулю разность между двумя соседними числами. Какой максимальный размах может иметь хорошая последовательность длины n ? Почему Вы так считаете?
7. В квадрате 3×3 расставлены плюсы и минусы. В нём можно производить следующие операции: сдвигать знаки в строчке на одну клетку вправо (а знак из крайней правой клетки ставить в крайнюю левую) и сдвигать знаки в столбце на одну клетку вниз (а знаки из нижней клетки ставить в верхнюю клетку). Покажите, что из любой расстановки можно получить любую другую с таким же количеством плюсов.
8. Дан алгоритм для натуральных чисел a, b и целых чисел res, i :

```
1 Начало
2   Считываем a
3   Считываем b
4   Присваиваем res значение 0
5   Присваиваем i значение 0
6   Пока (i меньше b) делаем
7     Начало
8       Увеличиваем res на a
9       Увеличиваем i на 1
10    Конец
11   Выводим res
12 Конец
```

- (a) Напишите, что будет выведено при $a=7$ и $b=6$.
- (b) Опишите, что делает этот алгоритм (что выводится для произвольных a и b). Объясните своё решение.
- (c) Напишите, что будет выведено при $a=1024$ и $b=9765625$.

10–11 класс

1. Функция f такова, что для любых вещественных чисел m и n верно $f(m+n) = f(m) + f(n)$. Известно также, что $f(2011) = 2012$. Чему равна сумма $f(1) + f(2) + \dots + f(2010)$? Ответ объясните.

2. На плоскости нарисованы две пары перпендикулярных прямых (прямые различны и все четыре пересекаются в одной точке). Докажите, что ортогональные проекции любой точки плоскости (кроме точки пересечения всех прямых) на данные прямые образуют вершины прямоугольника.

Ортогональной проекцией точки на прямую называется основание перпендикуляра, опущенного из этой точки на эту прямую.

3. Известно, что $x+y+z = 3$, $xy+yz+xz = -1$ и $xyz = -5$. Чему равно $x^2y^3+x^2z^3+y^2x^3+y^2z^3+z^2x^3+z^2y^3$?

4. В вершинах куба расставлены рыцари и лжецы. Назовём грань лживой для человека, находящегося в одной из вершин этой грани, если в трёх оставшихся её вершинах лжецов больше, чем рыцарей. Назовём грань рыцарской для человека, находящегося в одной из вершин этой грани, если в трёх оставшихся её вершинах лжецов меньше, чем рыцарей. Каждый человек сказал, что среди трёх граней, содержащих его вершину, лживых граней больше чем рыцарских. Найдите количество лжецов в этом кубе.

5. Вещественнозначная функция f , определённая на множестве натуральных чисел, удовлетворяет следующему соотношению:

$$f(n+3) = \frac{f(n)-1}{f(n)+1}.$$

Покажите, что $f(n+12) = f(n)$.

6. Даны карточки с числами $1, 2, 3, 4, \dots, 2011$. Буратино и Мальвина по очереди кладут их на доску и каждый получает столько очков, каков модуль разности чисел на двух последних выложенных карточках (за первый ход очки не даются). Начинает игру Мальвина, а выигрывает тот, кто набрал больше очков. Кто может гарантировать себе победу и как он для этого должен играть?

7. В квадрате 2011×2011 расставлены плюсы и минусы. В нём можно производить следующие операции: сдвигать знаки в строчке на одну клетку вправо (а знак из крайней правой клетки ставить в крайнюю левую) и сдвигать знаки в столбце на одну клетку вниз (а знаки из нижней клетки ставить в верхнюю клетку). Покажите, что из любой расстановки можно получить любую другую с таким же количеством плюсов.

8. Прямоугольное здание неизвестного размера разделено перегородками на много одинаковых клеток-комнат так, что каждая комната представляет собой единичную клетку исходного прямоугольника. Некоторые соседние по стороне комнаты соединены дверью, причём из любой комнаты можно попасть в любую другую. Барона Мюнхгаузена с завязанными глазами проводят в одну из комнат. У него есть бумага и карандаш. Как ему составить карту здания, то есть найти общее количество комнат и отметить все имеющиеся двери (разрешается проходить через двери, а также отмечать пройденные комнаты в плане; ничего ломать и портить нельзя)?

9. Дана функция $\text{multi}(a,b)$ от целых a и b :

- 1 Начало
- 2 Присваиваем d значение $|b|$
- 3 Если $(d=0)$, возвращаем 0
- 4 Иначе, возвращаем $a+\text{multi}(a,d-1)$
- 5 Конец

(a) Чему равно $\text{multi}(7,6)$?

(b) Как Вы думаете, что возвращает эта функция? Почему Вы так считаете?

(c) Чему равно $\text{multi}(1024,9765625)$?